توابع و اعداد گنگ!

روح‌الله حسنی‌کله‌لوئی
و لیلا قدیمی‌لاله‌دشتی
کارشناسان ارشد ریاضی محض و دبیران دبیرستان منطقهٔ زرقان شیراز

مقدمه

در ایــن مقالــه تأثیر رفتار برخی از توابــع را روی اعداد گنگ و گویا بررســی می‌کنیم. بدین معنا که می‌خواهیم به این پرســش پاســخ دهیم: «تأثیر توابع چند جمله‌ای و مثلثاتی بر مجموعه اعداد گنگ و گویــا چیســت؟» این مقاله نگاهی پیشاحســابانی به توابــع دارد و وارد مقوله‌هایی چون پیوســتگی و ناپیوستگی نخواهد شد، مگر در یک مورد آن هم برای اثبات یک لم.

مقدمات و تعاریف

بحث را با مسئله‌ای آغاز می‌کنیم که مواجهه با آن، ایدهٔ ما برای نوشتن این مقاله بوده است.

مسئله: اگر a عددی گنگ باشد، آیا a^7+a نیز عددی گنگ است؟

در نگاه اول به نظر می‌رسد با مثال‌های متعارف مانند $\sqrt[7]{2}$، $\sqrt{2}$ و... جواب مثبت اسـت. تلاش برای اثبات این موضوع به نتیجه نرسـید. بنابراین برای شناخت بیشتر مسئله را کوچک‌تر کردیم.

مسئلهٔ خرد: اگر a عددی گنگ باشد، آیا a^2+a نیز عددی گنگ است؟

در برخورد با این مسئله فکر تبدیل آن به یک معادله به ذهنمان خطور کرد. اگر معادلهٔ $x^2+x=1$ دارای ریشهٔ گنگ باشد، جواب مسئلهٔ خرد منفی است، که به سادگی پیداست که چنین است:

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

پس توانستیم با یک مثال نقض به مسئلهٔ خرد جواب منفی بدهیم. لذا به نظر می‌رسد که جواب مسئلهٔ اصلی نیز منفی باشـد، اما از روش حل مسـئلهٔ خرد نمی‌توان استفاده کرد (حل معادله از درجهٔ ۷ مقدور نیست). برای پاسخ به این مسئله و بلکه تعمیمی از آن نیازمند اندکی تعریف و قراردادیم.

تعریــف: گوییم تابع f، مجموعهٔ A را به مجموعهٔ B می‌نگارد (تصویر می‌کند)، هرگاه: $f(A)\subseteq B$. به‌عبارت دیگر، برای هر $x\in A$، $f(x)\in B$.

قــرارداد ۱. منظــور از چندجملــه‌ای در این مقاله چندجمله‌ای‌هایی مانند:

$$p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

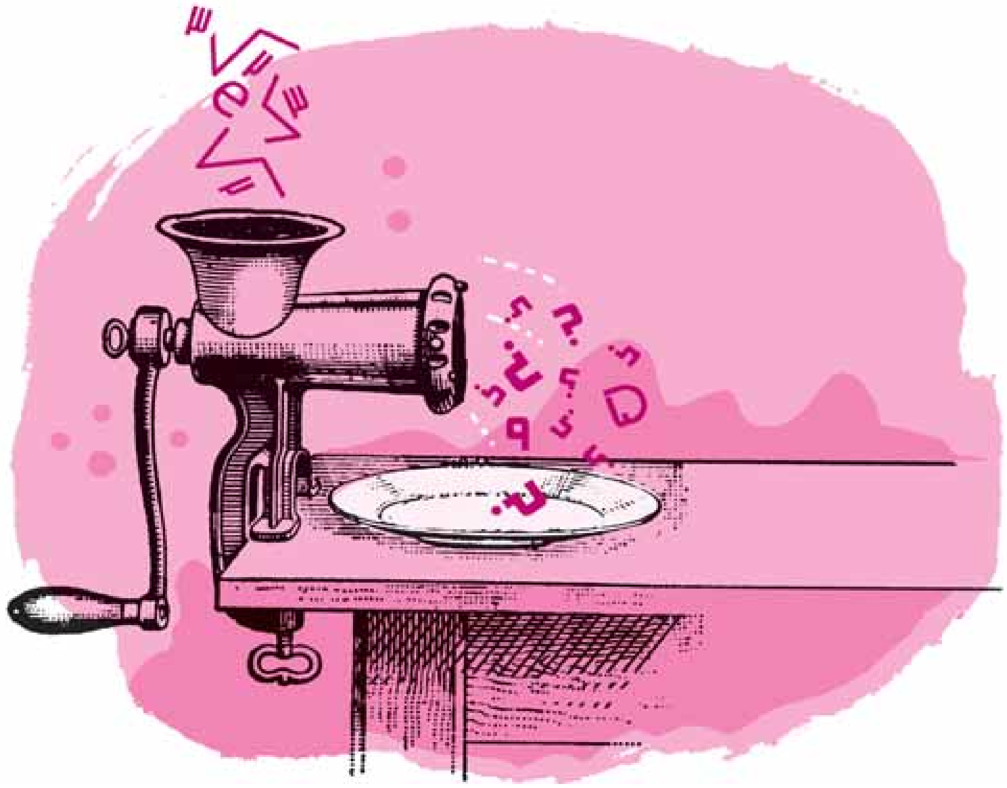
است که در آن‌ها تمام ضرایب عددی صحیح‌اند. همچنین منظور از «چندجمله‌ای تکین» یک چندجمله‌ای است کــه در آن ضریب جمله با بزرگ‌ترین توان یک اســت؛ مانند: $p(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$.

قرارداد ۲. در این مقاله مجموعهٔ اعداد گویا را با Q و مجموعهٔ اعداد گنگ را با Q^c نمایش می‌دهیم.

توابع چندجمله‌ای

قضیهٔ ۱. فرض کنید: $a,b\in Q$، $(a\neq 0)$ و $f(x)=ax+b$. در ایــن صــورت تابع f اعداد گنــگ را به اعداد گنگ می‌نگارد.

اثبــات: فرض کنیــد: $x\in Q^c$ و $f(x)=c\in Q$. در این صــورت: $x=\frac{c-b}{a}$. اما چون مجموعــهٔ اعداد گویا نسبت به تفاضل و تقسیم بر عدد غیرصفر بسته است،



بنابراین: $x\in Q$ که با فرض در تناقض است. لذا $f(x)$ عددی گنگ است.

قضیهٔ ۲. فرض کنید: $f(x)=\frac{1}{x}$، در این صورت تابع f اعداد گنگ را به اعداد گنگ می‌نگارد.

اثبات: فرض کنید: $x\in Q^c$ و $f(x)=c\in Q$. در این صورت: $x=\frac{1}{c}$. اما معکوس هر عدد گویای غیرصفر، عددی گویاست، پس: $x\in Q^c$ که با فرض در تناقض است. لذا $f(x)$ عددی گنگ است.■

قضیهٔ ۳. اگر $x=\frac{p}{q}$ $(p,q\in Z)(q\neq 0)$ و $(p,q)=1$) یک ریشهٔ چندجمله‌ای $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ باشد، آن‌گاه p یک مقسوم‌علیه a_0 و q یک مقسوم‌علیه a_n است.

اثبات: چون $\frac{p}{q}$ ریشهٔ این چند جمله‌ای است، لذا: $f(\frac{p}{q})=0$ و بنابراین:

$$a_n(\frac{p}{q})^n+a_{n-1}(\frac{p}{q})^{n-1}+...+a_1(\frac{p}{q})+a_0=0$$

با ضرب طرفین در q^n خواهیم داشت:

$$a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}q+...+a_1pq^{n-1}+a_0q^n=0$$

و این خود دو تساوی زیر را نتیجه می‌دهد:

$$p(a_np^{n-1}+a_{n-1}p^{n-2}q+...+a_1q^{n-1})=-a_0q^n$$

و:

$$q(a_{n-1}p^{n-1}+...+a_1pq^{n-2}+a_0q^{n-1})=-a_np^n$$

از تساوی نخست نتیجه می‌گیریم که a_0q^n بر p بخش‌پذیر است و چون $(p,q)=1$، پس p یک مقسوم‌علیه a_0 است. به همین طریق از تساوی دوم نتیجه می‌شود که q یک مقسوم‌علیه a_n است.■

نتیجهٔ ۱. تنها ریشه‌های گویا چندجمله‌ای تکین
$$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$$
مقسوم‌علیه‌های صحیح a_0 هستند.

اثبات: فرض کنیم $x=\frac{p}{q}$ که در آن، $(q\neq 0)$ $p,q\in Z$ و $(p,q)=1$ یک ریشهٔ گویا چندجمله‌ای تکین $f(x)$ باشد. از قضیهٔ قبل نتیجه می‌شود که: $p|a_0$ و $q|1$. لذا: $q=\pm 1$ و این نیز به نوبهٔ خود نتیجه می‌دهد: $x=\pm p|a_0$. ■

اکنون به مسئلهٔ اصلی برمی‌گردیم: «اگر a عددی گنگ باشد، آیا a^7+a نیز عددی گنگ است؟» جواب منفی است، چون مثلاً چندجمله‌ای $f(x)=x^7+x-1$ چون از درجهٔ فرد است، حداقل دارای یک ریشهٔ حقیقی مانند a است. اگر a عددی گویا باشد، بنابر نتیجهٔ ۱ باید مقسوم‌علیه ۱ باشد. بنابراین: $a=1$ یا $a=-1$. اما داریم: $f(1)\neq 0$ و $f(-1)\neq 0$ که تناقض است. بنابراین a عددی گنگ است و: $f(a)=0$. به عبارت دیگر، a عددی گنگ است و: $a^7+a=1\in Q$.

پرسشی که اکنون مطرح می شود این است که: «تحت چه شرایطی یک چندجمله‌ای، مجموعه اعداد گنگ را به مجموعه اعداد گنگ می‌نگارد؟» (البته بدیهی است که هر چندجمله‌ای، اعداد گویا را به اعداد گویا تصویر می‌کند.) برای پاسخ به این پرسش ابتدا یک لم و سپس قضیه‌ای را اثبات می‌کنیم.

لم ۱. اگر $p(x)$ یک چند جمله‌ای تکین با ضرایب صحیح و از درجهٔ $n>1$ باشد، آن‌گاه $k\in Z$ وجود دارد به‌طوری که: $p(k+1)-p(k)>1$.

اثبات: فرض کنیم چنین نباشد. پس برای هر $k\in Z$ داریم: $p(k+1)-p(k)\le 1$ و برای هر عدد صحیح مثبت مانند k داریم:

$$p(k)-p(k-1)\le 1$$
$$p(k-1)-p(k-2)\le 1$$
$$\vdots$$
$$p(1)-p(0)\le 1$$

اکنون با جمع کردن این نامساوی‌ها خواهیم داشت:

$$p(k)-p(0)\le k$$

به عبارت دیگر، برای هر عدد صحیح مثبت مانند k داریم:

$$p(k)-k\le p(0) \qquad (1)$$

همچنین به طریق مشابه می‌توان نشان داد، برای هر عدد صحیح منفی مانند k داریم:

$$p(0)\le p(k)-k \qquad (2)$$

اکنون چند جمله‌ای $f(x)$ را به‌صورت $f(x)=p(x)-x$ تعریف می‌کنیم. بدیهی است که چندجمله‌ای $f(x)$ از درجهٔ n یا $n-1$ است. اما اگر چندجمله‌ای $f(x)$ غیرثابت باشد، باید داشته باشیم: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ که این با (۱) و (۲) در تناقض است. لذا $f(x)$ یک چندجمله‌ای ثابت است و: $n=0$ یا $n=1$ که این نیز با فرض $n>1$ در تناقض است. بنابراین $k\in Z$ وجود دارد به‌طوری که: $p(k+1)-p(k)>1$. ■

قضیهٔ ۴. اگر چندجمله‌ای غیرثابت $p(x)$ مجموعه اعداد گنگ را به مجموعه اعداد گنگ تصویر کند، آن‌گاه این چند جمله‌ای از درجهٔ یک است.

اثبات: فرض کنید چندجمله‌ای
$$p(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$$
از درجهٔ $n>1$ باشد. همچنین فرض کنید: $q(x)=a_n^{n-1}p(\frac{x}{a_n})$. اکنون $q(x)$ یک چندجمله‌ای تکین است که اعداد گنگ را به اعداد گنگ تصویر می‌کند. بنا به لم ۱، $k\in Z$ وجود دارد به‌طوری که: $q(k+1)-q(k)>1$. در نتیجه عدد صحیحی مانند h وجود دارد، به‌طوری که:

$$q(k)<h<q(k+1)$$

اکنون بنا به قضیهٔ مقدار میانی از پیوستگی $q(x)$ نتیجه می‌شود که عدد حقیقی مانند m وجود دارد به‌طوری که: $k<m<k+1$ و $q(m)=h$. همچنین چون: $q(m)=h\in Q$، پس m نیز عددی گویا است. لذا m یک ریشهٔ گویا چندجمله‌ای تکین $f(x)=q(x)-h$ است بنا به نتیجهٔ ۱ این ریشه صحیح است، پس m عددی صحیح است و این با $k<m<k+1$ در تناقض است. بنابراین: $n=1$ و چندجمله‌ای $q(x)$ از درجهٔ یک است و این نیز نتیجه می‌دهد که $p(x)$ از درجهٔ یک است.

توابع مثلثاتی

در این بخش رفتار توابع مثلثاتی را با اعداد گویا بررسی می‌کنیم. **ایوان نیون**[1]، ریاضی‌دان آمریکایی، در سال ۱۹۵۶ قضیه‌ای را ثابت کرد که نشان می‌داد تنها زاویه‌های حادهٔ (برحسب درجه) گویا که لااقل یکی از نسبت‌های چهارگانهٔ مثلثاتی آن‌ها گویاست، زاویه‌های 30°، 45° و 60° هستند. با بیان دو لم این قضیه را اثبات می‌کنیم.

لم ۲. برای هر $n\in N$ و هر زاویهٔ θ اتحاد زیر همواره برقرار است:

$$\cos((n+1)\theta)=2\cos n\theta\cos\theta-\cos((n-1)\theta)$$

اثبات: از بسط تابع کسینوس داریم:

$$\cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cos a\cos b$$

بنابراین:

$$\cos(a+b)=2\cos a\cos b-\cos(a-b)$$

حال با قرار دادن $a=n\theta$ و $b=\theta$ در این تساوی اتحاد موردنظر اثبات می‌شود. ■

لم ۳. برای هر $n\in N$ و هر زاویهٔ θ، n عدد صحیح $a_0,a_1,...,a_{n-1}$ وجود دارند، به‌طوری که:

$$2\cos n\theta=(2\cos\theta)^n+a_{n-1}(2\cos\theta)^{n-1}+...+a_1(2\cos\theta)+a_0$$

اثبات: حکم را با استقرا ثابت می‌کنیم. برای $n=1$ و $n=2$ داریم: $2\cos\theta=2\cos\theta$ و $2\cos2\theta=(2\cos\theta)^2-2$. حال فرض کنیم حکم به ازای $n-1$ و n برقرار باشد. نشان می‌دهیم به ازای $n+1$ نیز برقرار است. به‌عبارت دیگر، $n-1$ عدد صحیح $c_0,c_1,...,c_{n-2}$ وجود دارند، به‌طوری که:

$$2\cos(n-1)\theta=(2\cos\theta)^{n-1}+c_{n-2}(2\cos\theta)^{n-2}+...+c_1(2\cos\theta)+c_0$$

همچنین n عدد صحیح $a_0,a_1,...,a_{n-1}$ وجود دارند، به‌طوری که:

$$2\cos n\theta=(2\cos\theta)^n+a_{n-1}(2\cos\theta)^{n-1}+...+a_1(2\cos\theta)+a_0$$

اکنون بنا به لم ۲ داریم:

$$\begin{aligned}2\cos((n+1)\theta)&=(2\cos n\theta)(2\cos\theta)-2\cos((n-1)\theta)\\&=\{(2\cos\theta)^{n+1}+a_{n-1}(2\cos\theta)^n+...+a_1(2\cos\theta)^2\\&+a_0(2\cos\theta)\}-\{(2\cos\theta)^{n-1}+c_{n-2}(2\cos\theta)^{n-2}+...\\&+c_1(2\cos)+c_0\}=(2\cos\theta)^{n+1}+a_{n-1}(2\cos\theta)^n\\&+(a_{n-2}-1)(2\cos\theta)^{n-1}+(a_{n-3}-c_{n-2})(2\cos\theta)^{n-2}+...\\&+(a_0-c_1)(2\cos\theta)-c_0\end{aligned}$$

با توجه به اینکه تمام ضرایب در آخرین عبارت تساوی فوق عددی صحیح‌اند، لذا حکم برای $n+1$ نیز برقرار است. ■

قضیهٔ ۵ (قضیهٔ نیون): اگر θ یک زاویه (برحسب درجه) گویا و $0<\theta<90^\circ$ باشد، آن‌گاه $f(\theta)=\cos\theta$ عددی گنگ است؛ بجز: $\theta=60^\circ$.

اثبات: فرض کنید: $\theta=\frac{p}{q}$، p,q عددی طبیعی و $\cos\theta$ عددی گویا باشد. قرار می‌دهیم: $n=360q$. بنابراین: $\cos n\theta=1$. لذا بنا به لم ۳، n عدد صحیح $a_0,a_1,...,a_{n-1}$ وجود دارند به‌طوری که:

$$2=(2\cos\theta)^n+a_{n-1}(2\cos\theta)^{n-1}+...+a_1(2\cos\theta)+a_0$$

اکنون اگر قرار دهیم $x=2\cos\theta$ خواهیم داشت:

$$2=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$$

که در نتیجه:

$$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0-2=0$$

بنابراین $2\cos\theta$ یک ریشهٔ معادلهٔ فوق است. اما بنا به نتیجهٔ ۱، اگر معادلهٔ فوق دارای ریشهٔ گویا باشد، آن

ریشه صحیح است. حال چون $\cos\theta$ عددی گویا ا ست، پس $۲\cos\theta$ نیز عددی گویا و ریشهٔ معادلهٔ فوق است. بنابراین عددی صحیح است. اما چون θ یک زاویهٔ حاده است، بنابراین: $۰<۲\cos\theta<۲$، پس باید: $۲\cos\theta=۱$. لذا: $\cos\theta=\frac{۱}{۲}$ که این نیز نتیجه می‌دهد: $\theta=۶۰^\circ$. ■

نتیجهٔ ۲. اگر θ یک زاویهٔ (برحسب درجه) گویا و $۰<\theta<۱۸۰^\circ$ باشد، آن‌گاه $f(\theta)=\cos\theta$ عددی گنگ است؛ بجز: $\theta=۶۰^\circ$، $\theta=۹۰^\circ$ و $\theta=۱۲۰^\circ$.

اثبات: اگر $۰<\theta<۹۰^\circ$ آن‌گاه بنا به قضیهٔ نیون داریم: $\theta=۶۰^\circ$. حال فرض کنید: $۹۰^\circ<\theta<۱۸۰^\circ$. اما: $\cos\theta=-\cos(۱۸۰-\theta)$ و $۰<۱۸۰^\circ-\theta\le۹۰^\circ$. بنابراین: $۱۸۰-\theta=۹۰^\circ$ یا $۰<۱۸۰^\circ-\theta<۹۰^\circ$. در حالت اول، $\theta=۹۰^\circ$ و $\cos\theta=۰$. در حالت دوم، بنا به قضیهٔ نیون داریم: $۱۸۰-\theta=۶۰^\circ$. بنابراین: $\theta=۱۲۰^\circ$ و $\cos\theta=-\frac{۱}{۲}$.

نتیجهٔ ۳. اگر θ یک زاویه برحسب درجه گویا و $۰<\theta<۹۰^\circ$ باشد، آن‌گاه $f(\theta)=\sin\theta$ عددی گنگ است؛ بجز $\theta=۳۰^\circ$.

اثبات: فرض کنید θ یک زاویه (برحسب درجه) گویا و $۰<\theta<۹۰^\circ$ و $\sin\theta$ عددی گویا باشد. چون: $\cos۲\theta=۱-۲\sin^۲\theta$، پس $\cos۲\theta$ نیز عددی گویا است. اما: $۰<۲\theta<۱۸۰^\circ$، لذا بنا به نتیجهٔ ۲ داریم: $۲\theta=۶۰^\circ$، $۲\theta=۹۰^\circ$ و $۲\theta=۱۲۰^\circ$.

بنابراین: $\theta=۳۰^\circ$، $\theta=۴۵^\circ$ و $\theta=۶۰^\circ$. اما چون $\sin۳۰^\circ=\frac{۱}{۲}$ و $\sin۶۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و $\sin۴۵^\circ=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$، پس: $\theta=۳۰^\circ$.

نتیجهٔ ۴. اگر θ یک زاویه (برحسب درجه) گویا و $۰<\theta<۹۰^\circ$ باشد، آن‌گاه $f(\theta)=\tan\theta$ عددی گنگ است؛ بجز $\theta=۴۵^\circ$. ■

اثبات: فرض کنید θ یک زاویه (برحسب درجه) گویا و $۰<\theta<۹۰^\circ$ و $\tan\theta$ عددی گویا باشد. اکنون به راحتی می‌توان نشان داد:

$$\cos۲\theta=\frac{۱-\tan^۲\theta}{۱+\tan^۲\theta}$$

سمت راست تساوی فوق عددی گویاست، لذا $\cos۲\theta$ نیز عددی گویا است و داریم: $۰<۲\theta<۱۸۰^\circ$ بنا به نتیجهٔ ۲ داریم: $۲\theta=۶۰^\circ$، $۲\theta=۹۰^\circ$ و $۲\theta=۱۲۰^\circ$، پس: $\theta=۳۰^\circ$، $\theta=۴۵^\circ$ و $\theta=۶۰^\circ$. اما چون $\tan۳۰^\circ=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ و $\tan۶۰^\circ=\sqrt{۳}$ و $\tan۴۵^\circ=۱$، بنابراین: $\theta=۴۵^\circ$. ■

پی‌نوشت

1. Ivan Niven

منابع

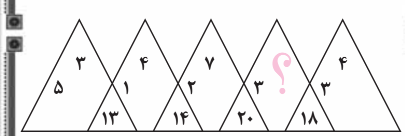
۱. نیون، ایوان (۱۳۶۷). اعداد گویا و گنگ. ترجمهٔ غلامحسین اخلاقی‌نیا. مرکز نشر دانشگاهی. تهران.
۲. برگزیدهٔ مسئله‌های جبر و آنالیز (۱۳۷۸). گزینش و ترجمهٔ ارشک حمیدی. انتشارات فاطمی. تهران. چاپ دوم.
3. Niven,.I.M, Irrational Numbers. New York: Wiley. 1956.

۵ پرسش‌های پیکارجو!

مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{B}=۹۰^\circ$) مفروض است. اگر نقطP را درون مثلث طوری در نظر بگیریم که زوایای APC، BPC و APB برابر باشند و P از A و B به فاصلهٔ ۱۰ و ۶ واحد باشد، فاصلهٔ P از C کدام است؟

الف) ۲۶ ب) ۲۸ ج) ۳۰ د) ۳۲ هـ) ۳۳

۱۴. به جای علامت سؤال چه عددی قرار می‌گیرد؟



تفریح اندیشه!